Question facultative :

6°) En utilisant les dérivées partielles d'ordre 2 de f, étudier la situation de $\mathcal{S}^*$ par rapport à son plan tangent au voisinage des points M de $\mathcal{S}^*$ pour lesquels on peut conclure. (On discutera suivant la position de la projection de M sur xOy).

MINISTERE DE L'ENVIRONNEMENT
ET DU CADRE DE VIE

E.I. T.P.E. 1981

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
(temps accordé : 2 heures)

4

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a > o$ et $b^2 - 4ac < o$. Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est d'étudier lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des fonctions à valeurs réelles continuement dérivables sur E et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \quad \left[a(f(x))^2 + b\,f(x) + c\right] x^2 f'(x) = (f(x))^2 - 1$$

I a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$R = \frac{aX^2 + bX + c}{X^2 - 1}$$

b) Soit f un élément de $\mathcal{J}(E)$. On définit :

$$\cup(f) = \{x \in E \ / \ (f(x))^2 - 1 \neq o\}$$

Montrer que ou bien $\cup(f)$ est vide, ou bien il existe un réel K tel que pour tout réel x dans $\cup(f)$ on a :

$$-\frac{1}{x} = \frac{a+b+c}{2} \text{ Ln } |f(x)-1| - \frac{a-b+c}{2} \text{ Ln } |f(x)+1| + a\, f(x) + K$$

Ln = logarithme népérien.

II Etudier la fonction réelle d'une variable réelle h définie par

$$h(y) = \frac{a+b+c}{2} \text{ Ln } |y-1| - \frac{a-b+c}{2} \text{ Ln } |y+1| + ay + K$$

On désignera par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les abscisses des zéros éventuels de h et par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$ les abscisses de ses points d'inflexion éventuels. On donnera rapidement l'allure du graphe de h dans chacun des trois cas suivants : $b < o$, $b = o$ et $b > o$.

III On donne : $a = \sqrt{2}$ et $K = \frac{3}{2}$

$b = -\sqrt{3}$

$c = \sqrt{5}$

a) Calculer avec une précision meilleure que 10^{-4} les nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_q$. (On pourra être amené à utiliser la méthode de Newton).

b) Tracer sur une même figure les graphes des fonctions h et $g = -\frac{1}{h}$, à l'échelle de 2 centimètres par unité sur les deux axes.

IV Déduire du I et de l'étude graphique précédente le cardinal de l'ensemble $\mathcal{J}(E)$ dans les deux cas suivants :

a) $E = \mathbb{R}$

b) $E = \mathbb{R}^*$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail